模块三 离散型随机变量及其分布

第 1 节 条件概率公式、全概率公式（★★★）

强化训练

1．（2023·辽宁模拟·★★）某班有 7 名班干部，其中 4 名男生，3 名女生，从中选出 3 人参加学校组织的社会实践活动，在男生甲被选中的情况下，女生乙也被选中的概率为_____.

答案：$\frac{1}{3}$

解法 1：记男生甲被选中为事件 A，女生乙被选中为事件 B，则所求概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，

故只需计算 $P(AB)$ 和 $P(A)$，可用古典概率公式算，

由题意，$n(\Omega)=C_7^3=21$，若事件 A 发生，则甲被选中，只需从余下 6 人中再选 2 人，所以 $n(A)=C_6^2=15$，

若事件 A 和 B 同时发生，则男生甲、女生乙都被选中，只需从余下 5 人中再选 1 人，所以 $n(AB)=C_5^1=5$，

从而 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{15}{21}$，$P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{5}{21}$，故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$.

解法 2：也可从条件的直观意义，把条件作为新的样本空间来考虑，

以男生甲被选中为新的样本空间，若甲被选中，则只需从余下 6 人中再选 2 人，共有 $C_6^2=15$ 种选法，

在这之中，若女生乙也被选中，则只需从余下 5 人中再选 1 人，有 $C_5^1=5$ 种，故所求概率为 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

2．（2023·湖南长沙模拟·★★）为参加学校组织的“喜迎十二大，奋进新征程”的演讲比赛，某班从班级初选的甲乙 2 名男生和 6 名女生中随机选取 5 名组成班级代表队参加比赛，则在代表队中既有男生又有女生的条件下，男生甲被选中的概率为（　　）

（A）$\frac{15}{36}$　（B）$\frac{5}{7}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{7}{10}$

答案：D

解法 1：要算条件概率，可套用条件概率公式 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，

记代表队中既有男生又有女生为事件 A，男生甲被选中为事件 B，则 $n(\Omega)=C_8^5=56$，

正面考虑 A 包含的样本点数需分 2 类，反面只有 1 类，故从反面考虑，$n(A)=56-C_6^5=50$，

若男生甲被选中，则在余下 7 人中任选 4 人，都满足代表队中既有男生又有女生，

所以 $n(AB)=C_7^4=35$，从而 $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{35}{56}$，$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{50}{56}$，故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{35}{56}}{\frac{50}{56}}=\frac{35}{50}=\frac{7}{10}$.

解法 2：也可从条件的直观意义，把条件作为新的样本空间来考虑，

若代表队中既有男生又有女生，则有 1 男 4 女，2 男 3 女两类情况，全部的选法有 $C_2^1C_6^4+C_2^2C_6^3=50$ 种，

再考虑这 50 种之中，男生甲被选中的有几种，若甲被选中，则只需从余下 7 人再任选 4 人即可，

上述 50 种之中，男生甲被选中的有 $C_7^4=35$ 种，故所求概率为 $\dfrac{35}{50}=\dfrac{7}{10}$.

3．（2023・全国甲卷・★★）某地的中学生中有 60%的同学爱好滑冰，50%的同学爱好滑雪，70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪，在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为（　　）

（A）0.8　（B）0.6　（C）0.5　（D）0.4

答案：A

解法 1：所求概率为条件概率，不妨以条件爱好滑雪为新的样本空间，考虑其中爱好滑冰的人数. 题干的文字描述较抽象，可画 Venn 图来分析，

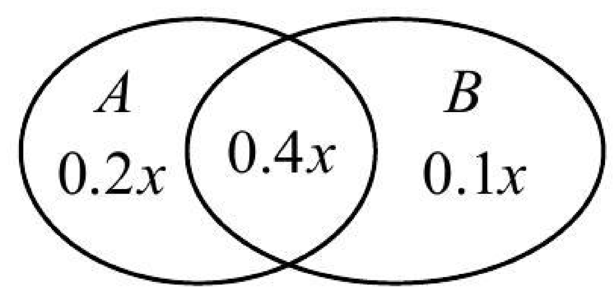
设总人数为 x，则爱好滑冰的有 $0.6x$ 人，记为集合 A，爱好滑雪的有 $0.5x$ 人，记为集合 B，爱好滑冰或爱好滑雪的有 $0.7x$ 人，如图，爱好滑雪的 $0.5x$ 人中有 $0.4x$ 人爱好滑冰，故所求概率 $P=\dfrac{0.4x}{0.5x}=0.8$.

解法 2：所求为条件概率，也可套公式计算，先设事件，

设“该同学爱好滑雪”为事件 A，“该同学爱好滑冰”为事件 B，则所求概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ ①，

由题意，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(A\cup B)=0.7$，

所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.5-0.7=0.4$，代入①得 $P(B|A)=\dfrac{0.4}{0.5}=0.8$.



4．（2023・辽宁营口模拟・★★）在射击比赛中，甲、乙两人对同一目标各进行一次射击，甲击中目标的概率为 $\dfrac{3}{5}$，乙击中目标的概率为 $\dfrac{4}{5}$，则在目标被击中的情况下，甲击中目标的概率为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　（B）$\dfrac{12}{25}$　（C）$\dfrac{15}{23}$　（D）$\dfrac{3}{7}$

答案：C

解析：设目标被击中为事件 A，甲击中目标为事件 B，

要算 $P(B|A)$，可套用条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，下面先算分子，

由题意，$B\subseteq A$，所以 $AB=B$，故 $P(AB)=P(B)=\dfrac{3}{5}$，

再求 $P(A)$，目标被击中只需甲乙至少一人击中即可，情况较多，用对立事件来算比较方便，

又 $P(A)=1-(1-\dfrac{3}{5})\times(1-\dfrac{4}{5})=\dfrac{23}{25}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{23}{25}}=\dfrac{15}{23}$.

5．（2022・湖南模拟・★★）某人忘记了一个电话号码的最后一个数字，只好去试拨，则他第一次失败，

第二次成功的概率是_____.

答案： $\dfrac{1}{10}$

解析： 设他第一次失败为事件 A，第二次成功为事件 B，则所求概率即为 $P(AB)$，

事件 A 是否发生对事件 B 有影响，二者不独立，故用乘法公式求 $P(AB)$，该选谁为条件来展开？由于在已知第一次试验结果的条件下，容易求得第二次结果的概率，故选 A 为条件，用 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 来求 $P(AB)$，

由题意，$P(A)=\dfrac{C_9^1}{C_{10}^1}=\dfrac{9}{10}$，$P(B|A)=\dfrac{C_1^1}{C_9^1}=\dfrac{1}{9}$，所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10}$.

6.（2023 •天津模拟 •★★）52 张扑克牌，没有大小王，无放回地抽取两次，则两次都抽到 2 的概率为_____.

答案： $\dfrac{1}{221}$

解析： 设第一次抽到 2 为事件 A，第二次抽到 2 为事件 B，则所求概率即为 $P(AB)$，

可用乘法公式算，且若已知第一次的抽取结果，则容易求出第二次抽取时，B 发生的概率，故选 A 为条件，

由乘法公式，$P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{C_4^1}{C_{52}^1}\times\dfrac{C_3^1}{C_{51}^1}=\dfrac{1}{221}$.

7.（2023 • 浙江联考 • ★★★）已知随机事件 A，B 满足 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(A|B)=\dfrac{3}{4}$，则 $P(\overline{B}|A)=$_____.

答案： $\dfrac{7}{16}$

解析： 所求概率中有 $\overline{B}$，已知条件中没有 $\overline{B}$，先用条件概率性质将 $\overline{B}$ 转换成 B，并套用条件概率公式，

由条件概率性质，$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1-3P(AB)$ ①，

此时发现只需求 $P(AB)$，将 $P(A|B)$ 展开会出现这部分，

由题意，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{3}{4}$，所以 $P(AB)=\dfrac{3}{4}P(B)=\dfrac{3}{16}$，代入①得 $P(\overline{B}|A)=1-3\times\dfrac{3}{16}=\dfrac{7}{16}$.

8.（2023 • 河北石家庄模拟 • ★★★）某种疾病的患病率为 5%，通过验血诊断该疾病的误诊率为 2%，即非患者中有 2%的人诊断为阳性，患者中有 2%的人诊断为阴性. 随机抽取 1 人进行验血，则其诊断结果为阳性的概率为（　　）

（A）0.46　　（B）0.046　　（C）0.68　　（D）0.068

答案： D

解析： 诊断结果为阳性，实际可能是患病中诊出阳性，也可能是不患病中诊出阳性，故按是否患病划分样本空间，套用全概率公式算概率，

记随机抽取的 1 人患病为事件 A，诊断结果为阳性为事件 B，

则由全概率公式，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=5\%\times(1-2\%)+(1-5\%)\times2\%=0.068$.

9.（2022 • 福建厦门模拟 • ★★★）某游泳小组共有 20 名运动员，其中一级运动员 4 人，二级运动员 8

人，三级运动员 8 人. 现举行一场游泳选拔比赛，若一、二、三级运动员能够晋级的概率分别是 0.9，0.7，0.4，则在这 20 名运动中任选一名运动员，他能够晋级的概率为（　　）

（A）0.58　　（B）0.6　　（C）0.62　　（D）0.64

答案：C

解析：给出了各级运动员晋级的概率，故按取到运动员的级别来划分样本空间，套用全概率公式，

记取到一、二、三级运动员分别为事件 A_1，A_2，A_3，取到的运动员能晋级为事件 B，由全概率公式，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{C_4^1}{C_{20}^1}\times0.9+\frac{C_8^1}{C_{20}^1}\times0.7+\frac{C_8^1}{C_{20}^1}\times0.4=0.62.$$

10．（2023 • 浙江模拟 • ★★★★）随着城市经济的发展，早高峰问题越发严重，上班族需要选择合理的出行方式，某公司员工小明上班出行的方式有三种，某天早上他选择自驾、坐公交车、骑共享单车的概率均为 $\frac{1}{3}$，而他自驾、坐公交车、骑共享单车迟到的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，结果这一天他迟到了，在此条件下，他自驾去上班的概率是_____.

答案：$\frac{15}{37}$

解析：设这一天小明迟到为事件 A，自驾、坐公交车、骑共享单车去上班分别为事件 B_1，B_2，B_3，

则所求概率为 $P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}$，

接下来先求 $P(AB_1)$，先罗列条件，$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$，$P(A|B_1)=\frac{1}{4}$，$P(A|B_2)=\frac{1}{5}$，$P(A|B_3)=\frac{1}{6}$，

故用乘法公式算分子时，应转换条件为 B_1，由乘法公式，$P(AB_1)=P(B_1)P(A|B_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，

再算 $P(A)$，结合已知条件可知用全概率公式. 给出了三种出行方式迟到的概率，故按出行方式划分样本空间，

由全概率公式，$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{37}{180}$，

所以 $P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{37}{180}}=\frac{15}{37}$.

11．（2022 • 重庆模拟 • ★★★）由于身体及心理方面的差异，人们往往认为女性驾驶员比男性驾驶员更容易发生交通事故. 为调查这一认识是否正确，同学们组成了调查小组，对其所在的城市进行了调查研究，结果显示：该市 2021 年男女驾驶员的比例为 7:3，男性驾驶员平均万人的发案率为 2.2，女性驾驶员平均万人的发案率为 0.25.（发案即发生交通事故，暂不区分其是否为肇事责任人）

（1）在 2021 年全市的驾驶员中随机抽取 1 人，若该人发案的概率为 $a\times10^{-4}$，求 a 的值；

（2）若该市一名驾驶员在 2021 年发生了交通事故，则其为女性的概率是多少？（保留到小数点后三位）

解：（1）（题干给出了男、女驾驶员的发案率，故按男、女划分样本空间，套用全概率公式求概率）

记取到男驾驶员为事件 A_1，取到女驾驶员为事件 A_2，取到的人发案为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{7}{10}\times\frac{2.2}{10000}+\frac{3}{10}\times\frac{0.25}{10000}=\frac{16.15}{10^5}=16.15\times10^{-5}$，

由题意，$16.15\times10^{-5}=a\times10^{-4}$，所以 $a=1.615$.

（2）所求概率为 $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}$，（分母已经有了，要算分子，可转换条件为 A_2，用乘法公式算）

由乘法公式，$P(A_2B)=P(A_2)P(B|A_2)=\frac{3}{10}\times\frac{0.25}{10000}=7.5\times10^{-6}$，所以 $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{7.5\times10^{-6}}{16.15\times10^{-5}}\approx0.046$.

12．（2023·新高考Ⅰ卷节选·★★★★）甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签确定第一次投篮的人选，第一次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

（1）求第二次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率.

解：（1）（第一次投篮的人可能是甲，也可能是乙，两种情况下第二次投篮的人是乙的概率都是已知的，故按第一次投篮的人是谁划分样本空间，套用全概率公式）

记第 $i(i=1,2,3,\cdots)$ 次投篮的人是甲为事件 A_i，第 2 次投篮的人是乙为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(\overline{A}_1)P(B|\overline{A}_1)=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$.

（2）（从第 $i-1$ 次到第 i 次的投篮情况，我们可画图辅助理解，如下图，第 $i-1$ 次两种情况下第 i 次投篮的人是甲的概率都已知，故根据第 $i-1$ 次由谁投篮划分样本空间，套用全概率公式来建立递推公式）

当 $i\geq2$ 时，由全概率公式，$P(A_i)=P(A_{i-1})P(A_i|A_{i-1})+P(\overline{A}_{i-1})P(A_i|\overline{A}_{i-1})=P(A_{i-1})\times0.6+[1-P(A_{i-1})]\times0.2$，

整理得：$P(A_i)=\frac{2}{5}P(A_{i-1})+\frac{1}{5}$ ①，

（要由此递推公式求 $P(A_i)$，可用待定系数法构造等比数列，设 $P(A_i)+\lambda=\frac{2}{5}[P(A_{i-1})+\lambda]$，展开化简得 $P(A_i)=\frac{2}{5}P(A_{i-1})-\frac{3}{5}\lambda$，与 $P(A_i)=\frac{2}{5}P(A_{i-1})+\frac{1}{5}$ 对比可得 $-\frac{3}{5}\lambda=\frac{1}{5}$，所以 $\lambda=-\frac{1}{3}$）

由①可得 $P(A_i)-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}[P(A_{i-1})-\frac{1}{3}]$，又 $P(A_1)=0.5=\frac{1}{2}$，所以 $P(A_1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，故 $\left\{P(A_i)-\frac{1}{3}\right\}$ 是等比数列，

首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 $\frac{2}{5}$，所以 $P(A_i)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}$，故 $P(A_i)=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{1}{3}$，

即第 i 次投篮的人是甲的概率为 $\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{1}{3}$.